

Definición

Una superficie cuadrática (o cuádrica) es la gráfica de una ecuación de segundo grado con tres variables x , y , z .

La forma general de la ecuación es:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

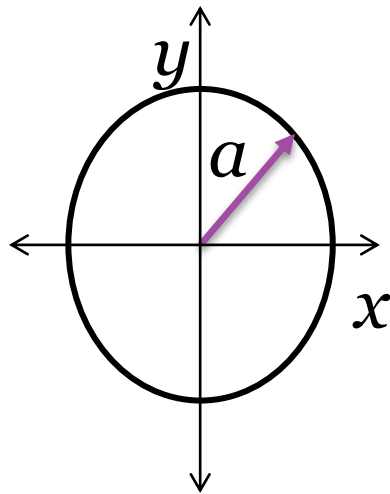
CILINDRO

Cuando una de las variables x , y ó z no aparece en la ecuación de la superficie, entonces la superficie es un **cilindro**.

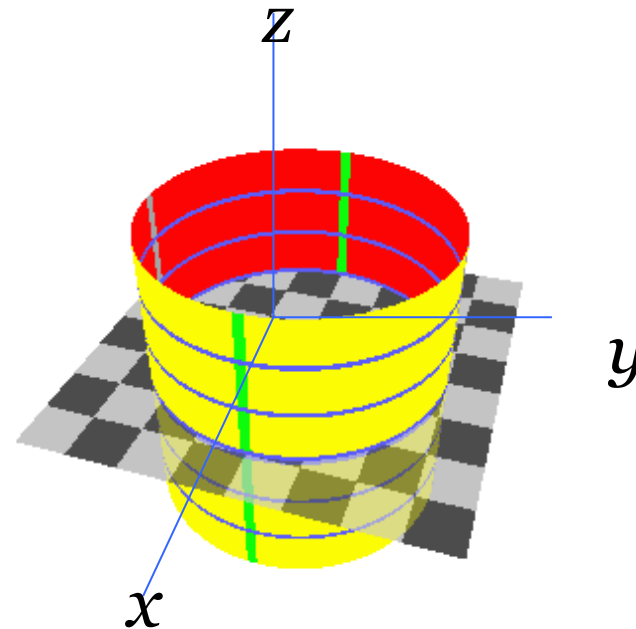
$$x^2 + y^2 = a^2$$

Es un cilindro en el espacio ya que falta la variable z . Por lo tanto, la gráfica del cilindro se extenderá paralelo al eje z .

En el plano:



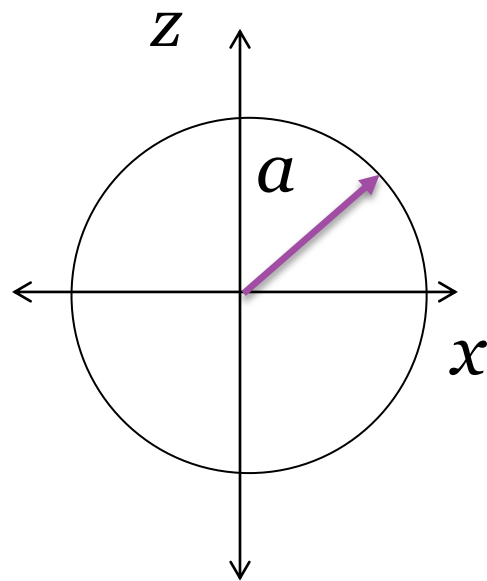
En el espacio:



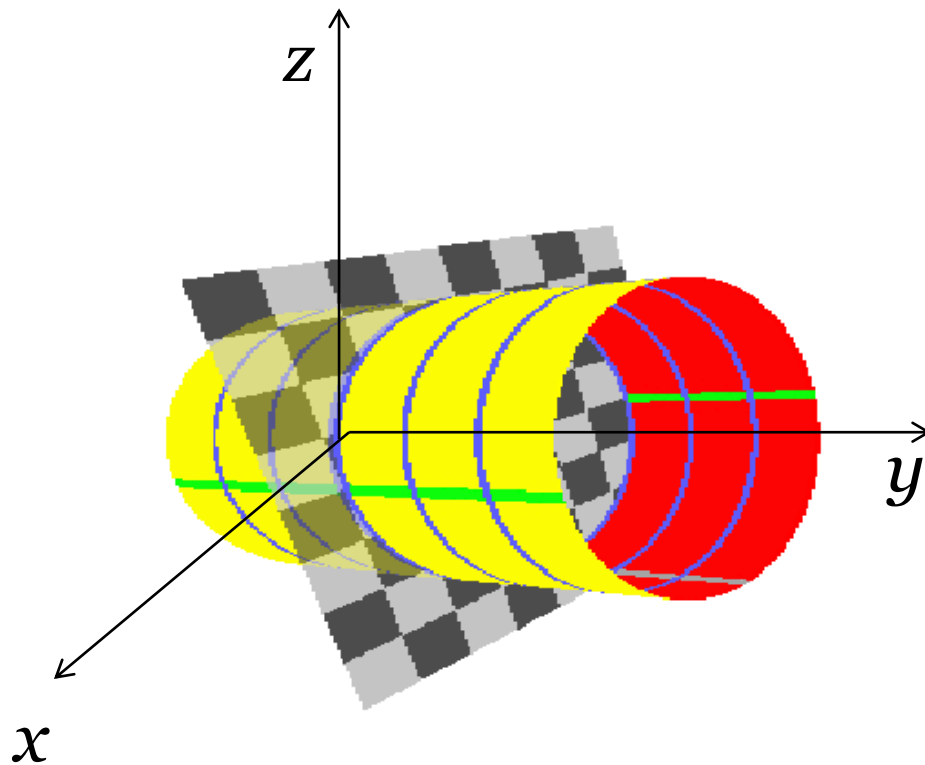
Cilindro circular recto paralelo al eje y :

$$x^2 + z^2 = a^2$$

En el plano:

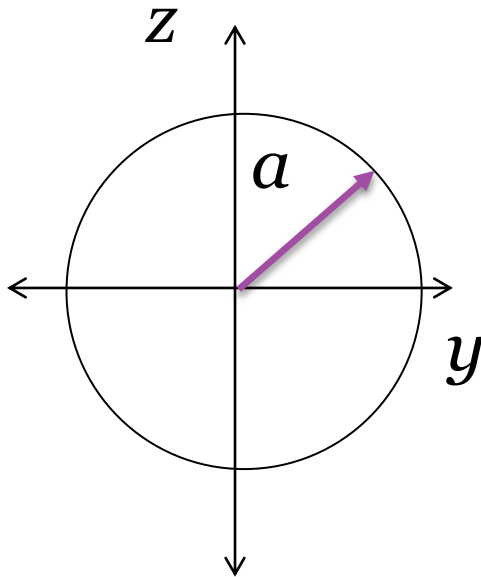


En el espacio:

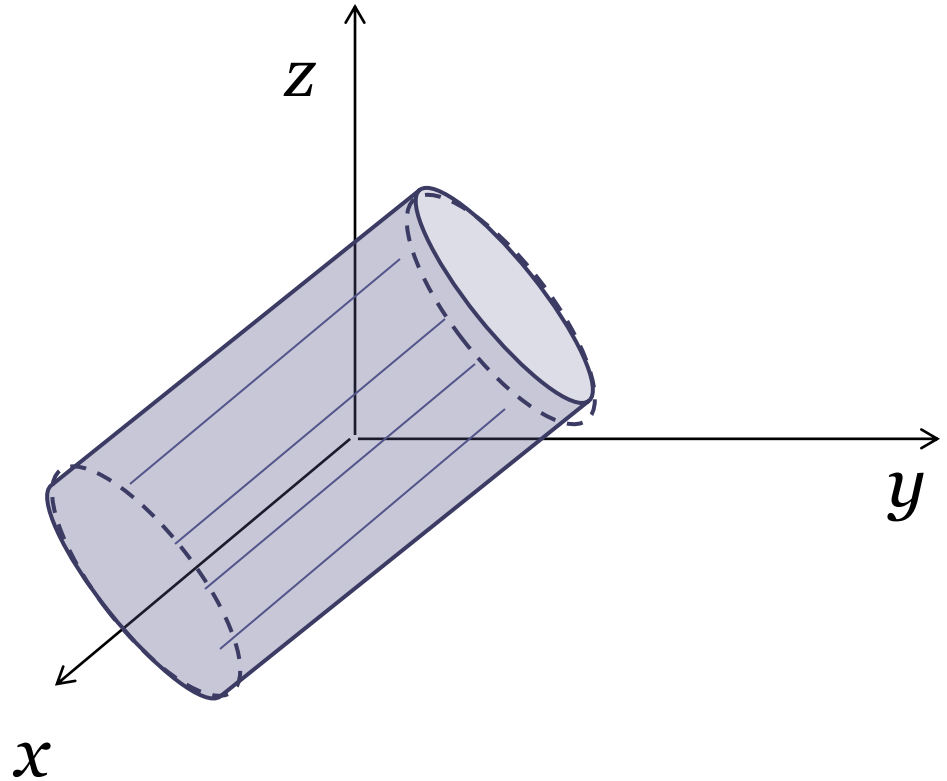


Cilindro circular recto paralelo al eje x : $y^2 + z^2 = a^2$

En el plano:



En el espacio:

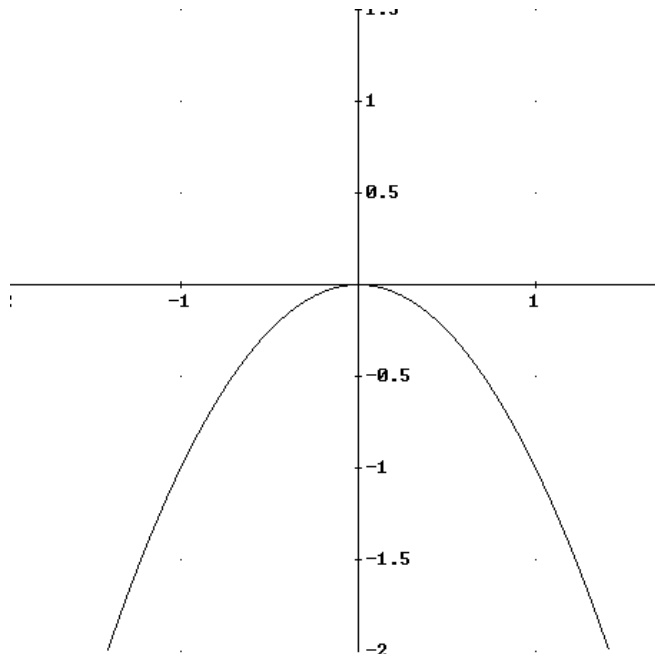


Cilindro parabólico

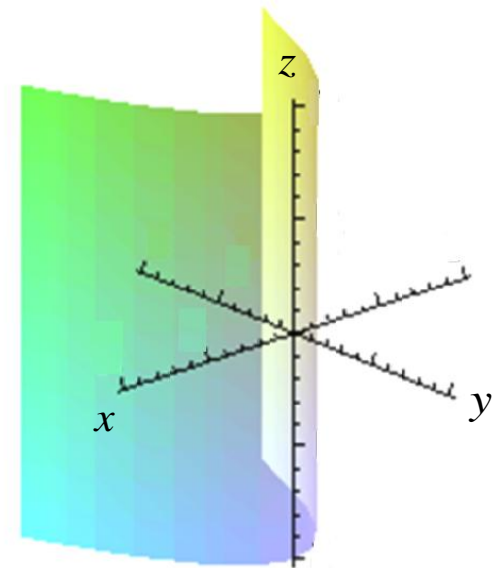
$$x^2 + y = 0$$

Es la ecuación que corresponde a una parábola en el plano xy , al variar z se obtiene la siguiente superficie:

En el plano:



En el espacio:

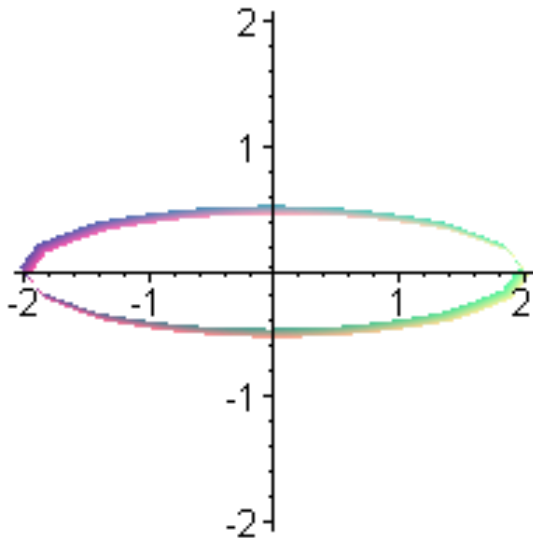


Cilindro elíptico

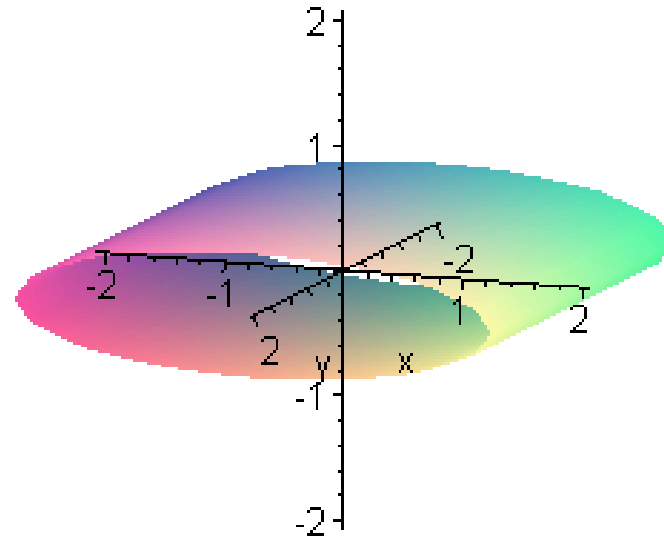
$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Es la ecuación que corresponde a una elipse en el plano yz , al variar x se obtiene la siguiente superficie:

En el plano:



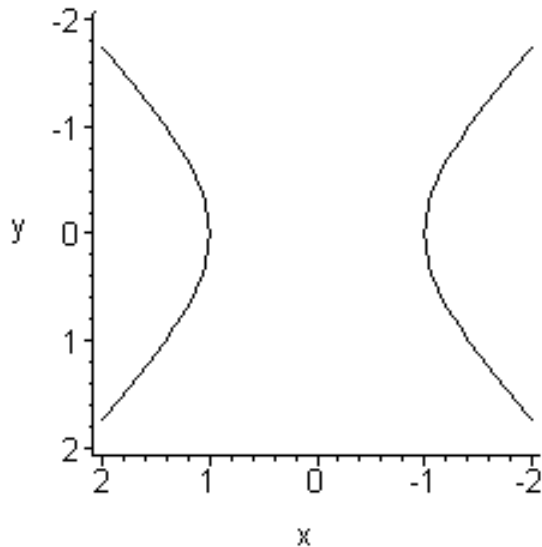
En el espacio:



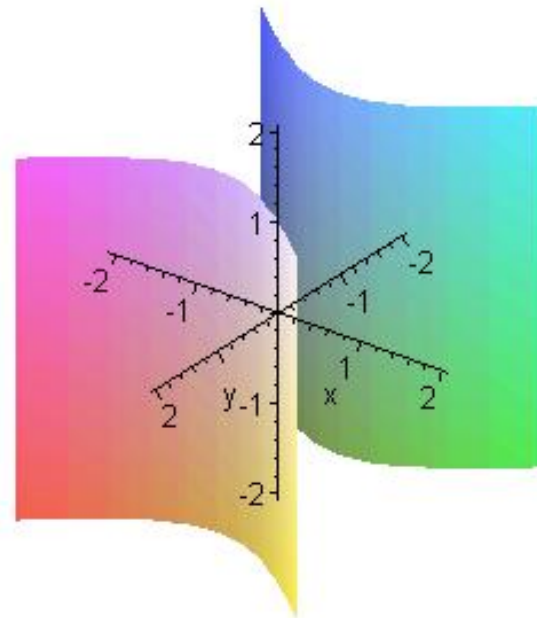
Cilindro hiperbólico $y^2 - z^2 = 1$

Es la ecuación que corresponde a una hipérbola centrada en el $(0,0)$ en el plano xy , al recorrer z se obtiene la superficie:

En el plano:



En el espacio:



ELIPSOIDES

Tiene por ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

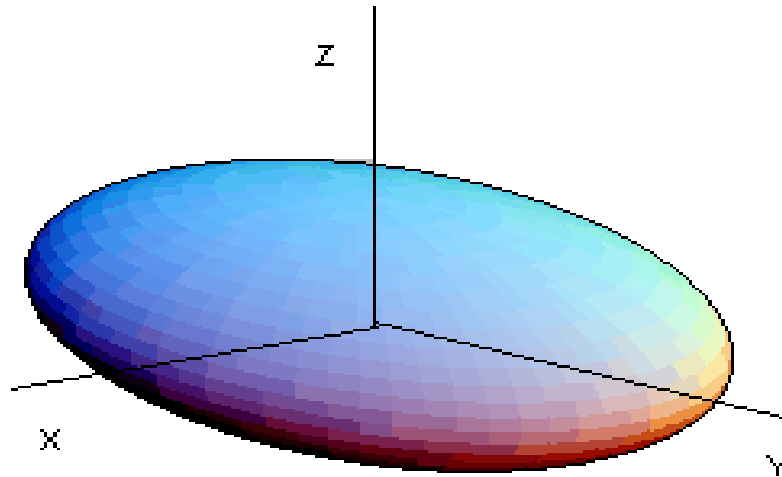
Las trazas del elipsoide son elipses, es decir, la intersección con planos paralelos a los planos coordenados es una elipse.

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{Elipse}$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{Elipse}$$

$$\text{Si } z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Elipse}$$

Para calcular donde corta el elipsoide a un eje dado, hacer igual a cero las variables correspondientes a los otros dos ejes.

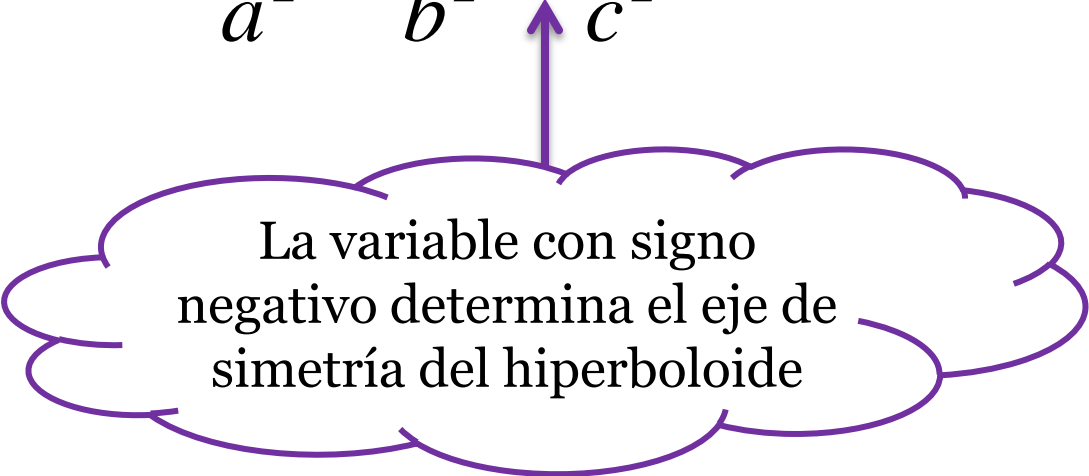


HIPERBOLOIDES

Existen dos tipos de hiperboloides: Los de una hoja y los de dos hojas.

Hiperboloide de una hoja

Tiene por ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



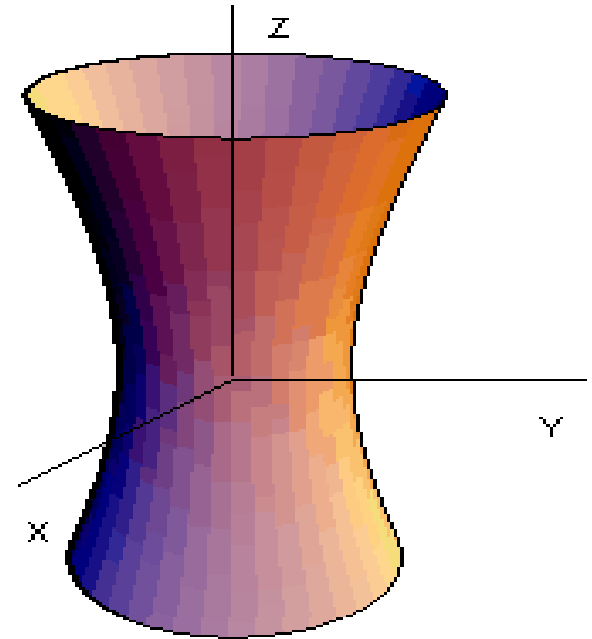
La variable con signo negativo determina el eje de simetría del hiperboloide

Las trazas del hiperboloide son hipérbolas en planos paralelos al plano xz y al yz , mientras que en planos paralelos al xy las trazas son elipses.

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{Hipérbola}$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{Hipérbola}$$

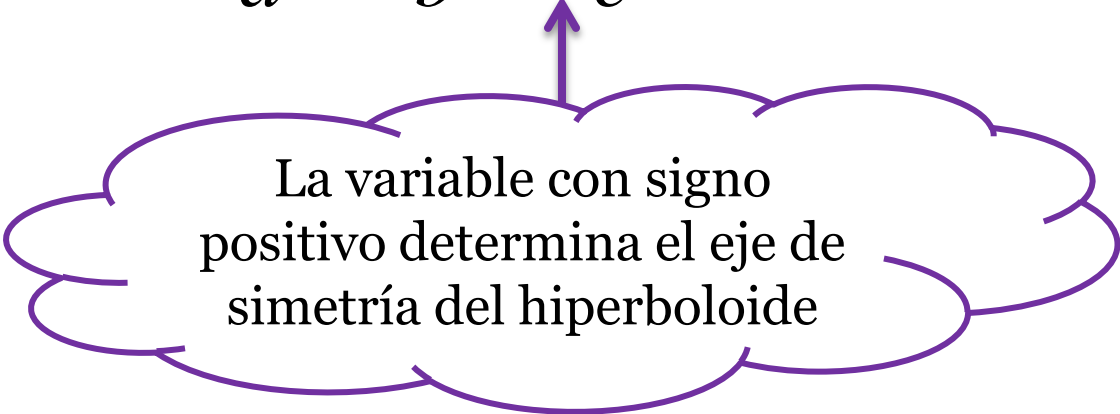
$$\text{Si } z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{Elipse}$$



Observación: La diferencia fundamental entre el hiperboloide de una hoja y el elipsoide es que tiene una variable con signo negativo.

Hiperboloide de dos hojas

Tiene por ecuación: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



La variable con signo positivo determina el eje de simetría del hiperboloide

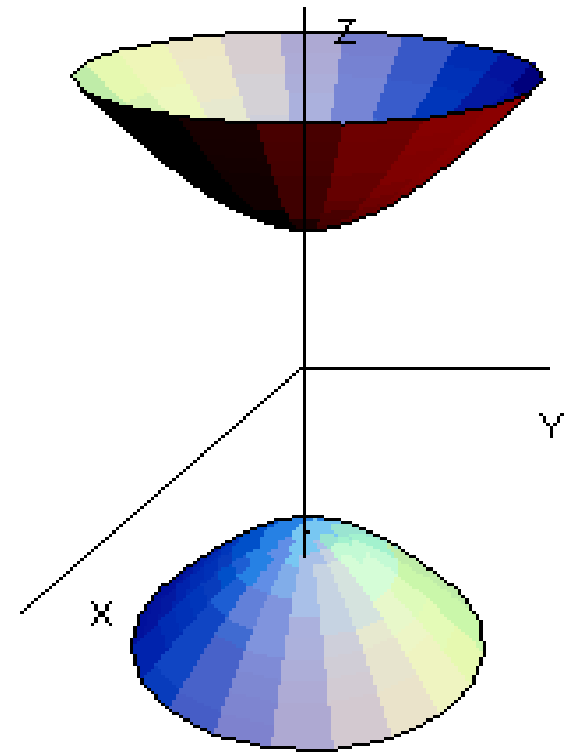
Las trazas de esta superficie son: para planos paralelos a xz son hipérbolas al igual que para planos paralelos a yz .

Si $x = 0 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Hipérbola

Si $y = 0 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ Hipérbola

Si $z = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Imposible! \Rightarrow No hay gráfica

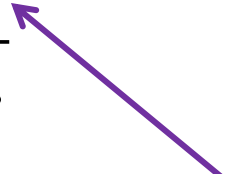


Observación:

Se diferencia de las otras superficies ya que tiene dos variables negativas.

PARABOLOIDE ELÍPTICO

Tiene por ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$



La variable a la primera potencia indica el eje del paraboloides

Las trazas del paraboloides son:

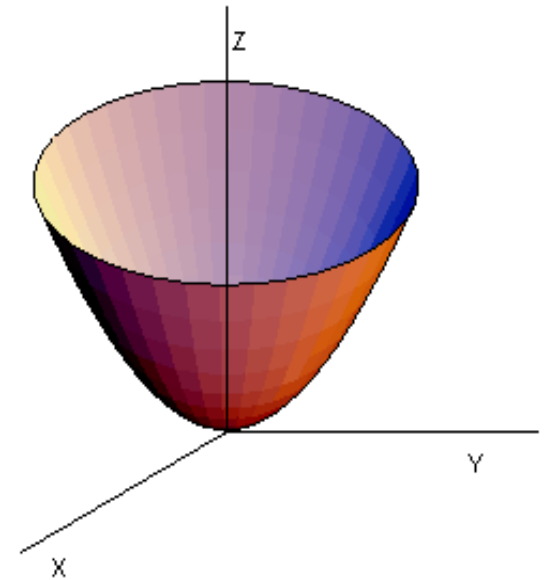
Para planos paralelos a xy son elipses, para planos paralelos a xz o a yz son parábolas.

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \Rightarrow y^2 = \frac{b^2 z}{c} \quad \text{Parábola}$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 z}{c} \quad \text{Parábola}$$

$$\text{Si } z = k \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k}{c} \quad \text{Elipse}$$

Si $a = b$ Círculo



Observación:

Su diferencia con las otras cuádricas es que tienen una variable que no está elevada al cuadrado, y las otras variables tienen el mismo signo.

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

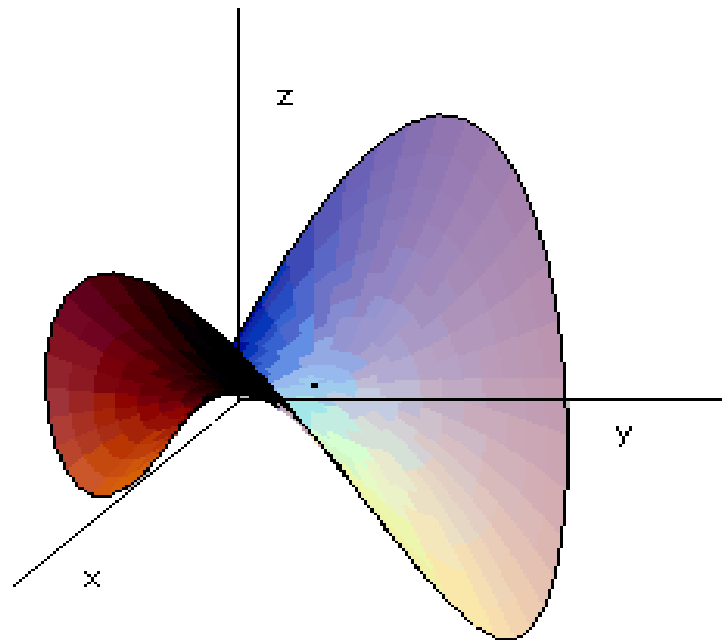
Tiene por ecuación:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Las trazas del paraboloides son: para planos paralelos a xy son rectas, para planos paralelos a xz o a yz son parábolas.

Si $x = 0 \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ Parábola

Si $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ Parábola

Si $z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Rightarrow |x| = \left| \frac{a}{b} y \right|$ Dos rectas



Observación:

Su diferencia fundamental con las otras superficies es que ella tiene en su ecuación una variable que no está elevada al cuadrado, y las otras variables tienen signos contrarios.

CONO

Tiene por ecuación:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

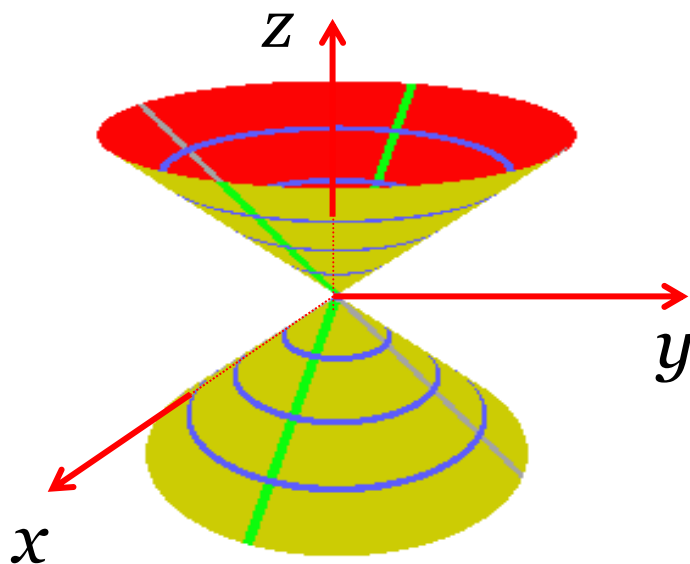
Las trazas del cono son:

Para planos paralelos a xy son elipses, para planos paralelos a xz o a yz son rectas.

Si $x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow |y| = \left| \frac{b}{c} z \right|$ Dos rectas

Si $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow |x| = \left| \frac{a}{c} z \right|$ Dos rectas

Si $z = k \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{b^2}$ Elipse



Observación:

Su diferencia fundamental con las otras superficies es que ella tiene en su ecuación una variable que no está elevada al cuadrado, y las otras variables tienen signos contrarios.